

# Algèbre linéaire

## Examen

### Partie commune

### Automne 2020

---

## Enoncé

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

---

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Algèbre linéaire du semestre d'Automne 2020.

---

## Notation

- Pour une matrice  $A$ ,  $a_{ij}$  désigne l'élément situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice.
- Pour un vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_i$  désigne la  $i$ -ème composante de  $\vec{x}$ .
- $I_m$  désigne la matrice identité de taille  $m \times m$ .
- $\mathbb{P}_n$  désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- $M_{m,n}(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices de taille  $m \times n$ .
- Pour  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire euclidien est défini par  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soit  $A$  une matrice symétrique telle que

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont des vecteurs propres de  $A$  associés, respectivement, aux valeurs propres 1, 0 et 2. Alors

☐  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

☐  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

☐  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

☐  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**Question 2 :** Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Alors la dimension de l'espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda = 1$  est égale à

☐ 0

☐ 1

☐ 2

☐ 3

**Question 3 :** L'inverse  $B = A^{-1}$  de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

est tel que

☐  $b_{32} = -2/3$

☐  $b_{23} = -2/3$

☐  $b_{31} = -2/3$

☐  $b_{13} = -2/3$

**Question 4 :** Le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

est

☐  $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 3$

☐  $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda - 3$

☐  $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda - 3$

☐  $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - \lambda$

**Question 5 :** Si on calcule la décomposition LU de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(en utilisant **seulement** les opérations élémentaires sur les lignes consistant à ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne **en dessous**), alors la matrice  $L$  obtenue est telle que

☐  $\ell_{42} = 1$

☐  $\ell_{42} = 2$

☐  $\ell_{42} = 1/3$

☐  $\ell_{42} = -1/3$

**Question 6 :** Soient  $\alpha$  un paramètre réel et  $A$  la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Pour quelle valeur de  $\alpha$  est-ce qu'on a  $\text{rang}(A) < 3$ ?

☐  $\alpha = 3$

☐  $\alpha = -3$

☐  $\alpha = 0$

☐  $\alpha = -7$

**Question 7 :** On considère  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire euclidien. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{R}^3$  définie par les vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Alors une base orthogonale, obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à  $\mathcal{B}$ , est donnée par les vecteurs

☐  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

**Question 8 :** On reprend les données de la question précédente. La projection orthogonale du vecteur

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  est le vecteur

☐  $\begin{bmatrix} 7/3 \\ -7/6 \\ 7/6 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 5/3 \\ 19/6 \\ -1/6 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$

**Question 9 :** Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Si  $\hat{x}$  est une solution au sens des moindres carrés du système  $A\vec{x} = \vec{b}$ , alors

☐  $\hat{x}_2 = 8/7$

☐  $\hat{x}_2 = -2/7$

☐  $\hat{x}_2 = 3$

☐  $\hat{x}_2 = 6/7$

**Question 10 :** Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Une solution  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  du système  $A\vec{x} = \vec{b}$  a pour deuxième composante

☐  $x_2 = -3$

☐  $x_2 = 10$

☐  $x_2 = 6$

☐  $x_2 = 1$

**Question 11 :** On se donne les bases de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{P}_2$  suivantes

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \{1, t + t^2, t - t^2\}.$$

Soit  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  l'application linéaire définie par  $T(\vec{x}) = x_1 t + x_2 t^2$  pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ . Alors la matrice associée à  $T$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{D}$  est

☐  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

**Question 12 :**

Le produit  $C = AB$  des matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

est tel que

☐  $c_{53} = 10$

☐  $c_{53} = -8$

☐  $c_{53} = 18$

☐  $c_{53} = 38$

**Question 13 :** La droite de régression linéaire pour les points  $(1, 2), (-1, 5), (0, 3)$  est

☐  $y = \frac{10}{3} - \frac{3}{2}t$

☐  $y = \frac{3}{2} + \frac{10}{3}t$

☐  $y = -\frac{10}{3} - \frac{3}{2}t$

☐  $y = \frac{10}{3} - \frac{14}{9}t$

**Question 14 :** Soit  $\mathcal{B}$  la base de  $\mathbb{P}_2$  donnée par  $\mathcal{B} = \{-1+t, 2t-t^2, 2-t+3t^2\}$  et soit  $p \in \mathbb{P}_2$  défini par  $p(t) = t - 8t^2$ . La troisième composante de  $p$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  est

☐  $-15/7$

☐  $11/7$

☐  $15$

☐  $-11/7$

**Question 15 :** Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors

☐  $\det(A) = -8$

☐  $\det(A) = -3$

☐  $\det(A) = 7$

☐  $\det(A) = 0$

**Question 16 :** Soient les vecteurs de  $\mathbb{R}^4$

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} h \\ 2 \\ 2h \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Pour quelle valeur de  $h \in \mathbb{R}$  le vecteur  $\vec{b}$  est-il dans  $\text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ?

☐  $h = 1/8$

☐  $h = -2$

☐  $h = 1$

☐  $h = 1/4$

**Question 17 :** Soient  $\mathcal{B} = \{1 + 3t, 2 + t^2, 4 + t + 3t^2\}$  et  $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$  deux bases de  $\mathbb{P}_2$ . Si la matrice  $P$  représente la matrice de changement de base telle que  $[q]_{\mathcal{C}} = P[q]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $q \in \mathbb{P}_2$ , alors

☐  $p_{12} = 4$

☐  $p_{12} = 3$

☐  $p_{12} = 0$

☐  $p_{12} = 2$

**Question 18 :** Soit  $R$  la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Alors, on a

☐  $r_{24} = -11/12$

☐  $r_{24} = 19/12$

☐  $r_{24} = -19/12$

☐  $r_{24} = 17/12$

**Question 19 :** La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

☐ est inversible et son inverse est diagonalisable orthogonalement

☐ est inversible et son inverse n'est pas diagonalisable orthogonalement

☐ n'est pas diagonalisable orthogonalement

☐ n'est pas inversible

**Question 20 :** Soient  $k$  et  $\ell$  des paramètres réels et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & \ell & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors  $\lambda = 6$  est une valeur propre de  $A$  lorsque

☐  $5k + \ell = 20$

☐  $5k + \ell = 2$

☐  $k + \ell = 4$

☐  $5k + \ell = 56$

## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

**Question 21 :** Si chaque ligne d'une matrice  $A$  est orthogonale à tous les vecteurs de  $\text{Nul}(A)$ , alors la matrice  $A$  est symétrique.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 22 :** L'ensemble

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \text{ tel que } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $M_{2,2}(\mathbb{R})$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 23 :** Soient

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Alors le vecteur  $\vec{v}$  est dans l'image de l'application linéaire  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 24 :** Soit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur  $\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ -1 \end{bmatrix}$  est dans  $\text{Nul}(A)$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 25 :** Soit  $A$  la matrice de la question précédente. Le vecteur  $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$  est dans  $\text{Col}(A)$ , le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de  $A$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 26 :** Le système linéaire

$$\begin{cases} 2x & -4z + 2t = -10 \\ & y + z = 2 \\ 3x + 5y + 8z - t = -6 \\ 2x + y - 3z + 2t = 1 \end{cases}$$

possède au moins une solution.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 27 :** Si une matrice  $A$  est inversible, alors  $A^T A$  est aussi inversible.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 28 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $3 \times 3$  dont les valeurs propres sont  $-1$ ,  $1$  et  $2$ . Alors le déterminant de  $A^T A$  est égal à  $2$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 29 :** Si, comme dans la question précédente,  $A$  est une matrice de taille  $3 \times 3$  dont les valeurs propres sont  $-1$ ,  $1$  et  $2$ , alors la matrice  $A$  est inversible et le déterminant de  $A^{-1}$  est égal à  $-1/2$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 30 :** Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$ . On suppose que  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^n$  sont des vecteurs propres de  $A$  dont les valeurs propres associées sont respectivement  $\alpha$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \neq \beta$ . Alors pour tout  $\vec{w} \in \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  on a  $\vec{w} \cdot \vec{v}_3 = 0$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 31 :** Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  trois vecteurs non-nuls. Si  $\vec{u}$  est orthogonal à  $\vec{v}$  et  $\vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{w}$ , alors  $\vec{u}$  est orthogonal à  $\vec{w}$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 32 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $8 \times 5$  telle que  $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$ . Alors la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de  $A$  est égale à  $3$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 33 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times (m+1)$  et telle que  $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ . Soient  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{m+1}$  tels que  $\vec{x} \neq \vec{y}$  et  $A\vec{x} = A\vec{y}$  et soit  $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$ . Alors  $\{\vec{z}\}$  est une base de  $\text{Nul}(A)$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 34 :** Les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 35 :** Soient  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et  $B$  une matrice de taille  $n \times m$  telles que  $BA$  soit inversible. Alors le rang de  $A$  est égal à  $n$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 36 :** Sachant que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 47/11 \\ 0 & 1 & 0 & -49/22 \\ 0 & 0 & 1 & 3/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est la forme échelonnée réduite de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

alors une base du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de  $A$  est donnée par les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 47/11 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -49/22 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3/11 \end{bmatrix}.$$

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 37 :** La matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

est diagonalisable.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 38 :** Soit  $S$  un sous-ensemble de l'espace vectoriel  $V$ . Si  $\dim V = n$  et si  $S$  engendre  $V$ , alors  $S$  est une base de  $V$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 39 :** Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension 2,  $W$  un espace vectoriel de dimension 5 et  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire injective. Alors la dimension de  $\text{Im}(T)$  est égale à 2.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 40 :** Si  $A$  est une matrice de taille  $6 \times 4$ , alors la dimension de  $\text{Nul}(A)$  est plus grande ou égale à 2.

☐ VRAI      ☐ FAUX